Problem 1

对m=n≥2来说, 完全二部图Km,n具有哈密尔顿回路.

当m=n时, 每个顶点的度数为m=n=(m+n)/2, 由狄拉克定理Km,n具有哈密尔顿回路

当m≠n时, 不妨设m>n, m个顶点中任取n个与n个构成Kn,n, 具有哈密尔顿回路

哈密尔顿回路不能包含更小的回路, 则Km,n不具有哈密尔顿回路

Problem 2

a) 反驳: 如图, n=5, δ(G)=2, 2≥(5-1)/2, 但不存在哈密尔顿回路

b) 证明: 构造G’=G\*K1, 即增加一个顶点, V(G)条边使其与G中所有顶点都邻接

此时V(G’)=V(G)+1, δ(G’)=δ(G)+1, 由δ(G)≥(V(G)-1)/2可得

δ(G’)≥(V(G)+1)/2=V(G’)/2, 由狄拉克定理G’存在哈密尔顿回路

从通路中删去新增的点得到哈密尔顿通路, 即G一定存在哈密尔顿通路

Problem 3

充分性: 设竞赛图中的顶点数为n, n=1或n=2时竞赛图不可能是强连通的

1) 当n≥3时, 任取一点v, 构建V1={u∈V | <u, v>∈E}, V2={u∈V | <v, u>∈E}

竞赛图强连通, 则V1, V2非空且V1∪V2=V-{v}, 存在v1∈V1, v2∈V2

满足<v2, v1>∈E, 则v, v1, v2构成长度为3的回路

2) 假设当n≥3时, 竞赛图中存在长度为k<n的回路C=v1v2…vkv1

则若对任意vs, vt(1≤s<t≤k), 回路C外存在一点v使得<vs, v>, <v, vt>∈E

对vi, vi+1(1≤i≤k-1), 存在v使得<vi, v>, <v, vi+1>∈E

可以构建回路C’=v1v2…vi v vi+1…vkv1, 是长度为k+1的回路

若对任意vs, vt(1≤s<t≤k), 回路C外不存在点v使得<vs, v>, <v, vt>∈E

令V1={v不属于回路C | 存在C上一点vi使<v, vi>∈E}

V2={v不属于回路C | 存在C上一点vi使<vi, v>∈E}

则V1, V2非空, 且V1∪V2=V-{vi | i = 1, 2, …, k}

存在s∈V1, t∈V2满足<s, t>∈E, 在C上任取三点vi-1, vi, vi+1

可以构建回路C’=v1v2…vi-1 s t vi+1…vkv1, 是长度为k+1的回路

对强连通竞赛图重复1) 2)步骤一定可以构建长度为n的回路, 即哈密尔顿回路

必要性: 竞赛图含有哈密尔顿回路, 则图中任意两点s, t均位于哈密尔顿回路上

设回路c=v1v2…vi-1 s vi+1…vj-1 t vj+1…vnv1, 则存在从s到t的通路

s vi+1…vj-1 t和从t到s的通路t vj+1…vnv1… vi-1 s, 竞赛图强连通

Problem 4

设G为11阶图, 每个点对应一门课程, 两点之间有边当且仅当这两门课程老师不同

没有老师担任多于6门课程, 即顶点的度最小是5, δ(G)≥5=(V(G)-1)/2

由Problem 2 b)可知G中存在哈密尔顿通路, 即一个符合上述要求的考试安排

Problem 5

a) 当N是偶数且M>1时, 在N行M列的网格中记第i行j列方格对应的点为vij则

构造C=v11, v12, …, v1n, v2n, v2 (n-1), …, v22, v32, v33, …, v3n, …,

Vmn, vm(n-1), …, vm1, v(m-1) 1, …, v21, v11. 则C为哈密尔顿回路, 如图

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **……** |  |  |  |
|  |  | **……** |  |  |  |
| ***.***  ***.***  ***.*** | **.**  **.**  **.** | **……** | ***.***  ***.***  ***.*** | ***.***  ***.***  ***.*** | ***.***  ***.***  ***.*** |
|  |  | **……** |  |  |  |
|  |  | **……** |  |  |  |

b) 当N和M都是大于1的奇数时, 取前N-1行, 则N-1为偶数

由a) 中构造方法可得M×N-1的网格构成的图G有哈密尔顿回路

哈密尔顿回路不能包含更小的回路, 则M×N网格的图不具有哈密尔顿回路

Problem 6

简单图G中V(G)=n, E(G)=m, 所有顶点的度数之和为2m>(n-1)(n-2)+2=n²-3n+4

在该图中去掉任意两个顶点u和v, 有(n-2)个顶点的完全图有(n-2)(n-3)/2条边

即一个有(n-2)个顶点的简单图中所有点的度数之和最大为(n-2)(n-3)=n²-5n+6

则有deg(u)+deg(v)>[(n²-3n+4)-(n²-5n+6)]/2=n-1

即对G中任意两点u, v都有deg(u)+deg(v)≥n, G一定存在哈密尔顿通路